VL Diskrete Mathematik, WS 2014/15 **Matr.Nr.: _ _ _ _ _ _ _**

Vorlesungsprüfung (1. Termin: 27. Jänner 2015) **Name:**

1. Es seien $a, b, c \in \mathbb{N}$.

   (a) Definieren Sie die Begriffe Teiler, echter Teiler und größter gemeinsamer Teiler. *(2 Punkte)*

   (b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der linearen diophantischen Gleichung $ax + by = c$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ an (ohne Beweis). *(1 Punkt)*

   (c) Zeigen Sie, dass jeder gemeinsame Teiler von a und b auch den größten gemeinsamen Teiler von a und b teilt. *(2 Punkte)*

   (d) Verwenden Sie den Erweiterten Euklidischen Algorithmus, um ganze Zahlen x und y zu finden, sodass $15 = 57x + 42y$. *(2 Punkte)*

2. Es seien $k, n \in \mathbb{N}_0$.

   (a) Definieren Sie die Begriffe Fakultät $n!$
   und Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ (über Mengen). *(2 Punkte)*

   (b) Formulieren Sie die Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten (ohne Beweis). *(1 Punkt)*

   (c) Beweisen Sie **entweder** kombinatorisch **oder** mit vollständiger Induktion **nach n** die explizite Formel *(3 Punkte)*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{für } 0 \leq k \leq n \ .$$

3. Geben Sie bei Ihren Antworten zu folgenden Fragen auch kurze Begründungen an.

   (a) Wieviele Worte der Länge n über $\{0, 1\}$ mit genau k Nullen gibt es? *(2 Punkte)*

   (b) Wieviele injektive Funktionen $f : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ gibt es? *(3 Punkte)*

   (c) Berechnen Sie den Koeffizienten von a^2b im Ausdruck $(2a - 5b)^3$. *(2 Punkte)*

4. (a) Definieren Sie die folgenden Begriffe: *(jeweils 1 Punkt)*

      i. Partition
      ii. Kartesisches Produkt
      iii. (Binäre) Relation
      iv. Äquivalenzrelation
      v. Äquivalenzklasse

   (b) Beweisen Sie:

      i. Sei R eine Äquivalenzrelation auf $A \neq \emptyset$. Dann gilt für $a, b \in A$: *(2 Punkte)*

$$[a] = [b] \iff aRb$$

      ii. Sei R eine Äquivalenzrelation auf $A \neq \emptyset$. Dann bilden die zugehörigen Äquivalenzklassen eine Partition von A. *(3 Punkte)*