VL Diskrete Mathematik, WS 2014/15 **Matr.Nr.: _ _ _ _ _ _ _**

Vorlesungsprüfung (2. Termin: 11. Februar 2015) **Name:**

1. (a) Definieren Sie die Begriffe reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv (für eine Relation R auf einer Menge A). *(2 Punkte)*
   (b) Definieren Sie die Begriffe Halbordnung und Totalordnung. *(2 Punkte)*
   (c) Beweisen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation eine Halbordnung ist. *(2 Punkte)*
   (d) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation $(\{2,3,4,6,8,10,12\}, |\ )$. *(1 Punkt)*

2. (a) Seien A und B zwei Mengen. Definieren Sie den Begriff Funktion von A nach B und geben Sie auch die entsprechenden Bezeichnungen und Schreibweisen an. *(2 Punkte)*
   (b) Definieren Sie die Begriffe injektive und surjektive Funktion. *(2 Punkte)*
   (c) Beweisen Sie, dass die Zusammensetzung von zwei injektiven Funktionen auch injektiv ist. *(1 Punkt)*
   (d) Beweisen Sie, dass die folgende Funktion für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ bijektiv ist:
   $$f : [a,b] \to [0,1] : x \mapsto \tfrac{x-a}{b-a} \ .$$
   Wie lautet die Umkehrfunktion? *(3 Punkte)*

3. (a) Formulieren und beweisen Sie den Satz von der ganzzahligen Division (Division mit Rest). *(5 Punkte)*
   (b) Stellen Sie $(2006)_{10}$ in der Basis 3 und $(22222)_3$ in der Basis 7 dar. *(2 Punkte)*

4. (a) Was versteht man unter einer (abgeschlossenen) Verknüpfung auf einer Menge M? *(1 Punkt)*
   (b) Definieren Sie den Begriff kommutative Gruppe und geben Sie ein Beispiel dafür an. *(3 Punkte)*
   (c) Beweisen Sie: Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und seien $a, b \in G$. Dann hat die Gleichung $a \circ x = b$ eine eindeutige Lösung in dieser Gruppe. *(3 Punkte)*
   (d) Was kann man aus diesem Satz für das neutrale Element folgern? (Beweis.) *(1 Punkt)*