Vorlesungsprüfung (3. Termin: 25. März 2015) **Name:**

1. (a) Beschreiben Sie das Prinzip der vollständigen Induktion und beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens. Definieren Sie dazu auch alle vorkommenden Begriffe (wie z.B. das Wohlordnungsaxiom für die natürlichen Zahlen) und geben Sie alle verwendeten Rechenregeln (der Aussagenlogik) an. *(5 Punkte)*

   (b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: *(3 Punkte)*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1} \cdot (n-1) + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. (a) Definieren Sie die Begriffe Partition, (Binäre) Relation, Äquivalenzrelation und Äquivalenzklasse. *(3 Punkte)*

   (b) Definieren Sie die Begriffe reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und transitiv (für eine Relation R auf einer Menge A). *(2 Punkte)*

   (c) Untersuchen Sie für die folgende Relation R auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, ob sie reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv ist (und begründen Sie Ihre Antworten): $xRy :\Longleftrightarrow x \cdot y$ gerade *(2 Punkte)*

   (d) Beweisen Sie die folgende Aussage.
   Sei P eine Partition von A. Dann ist die folgendermaßen definierte Relation R eine Äquivalenzrelation, und die Menge der zugehörigen Äquivalenzklassen stimmt mit der gegebenen Partition überein: *(4 Punkte)*

$$R := \{(x, y) \in A \times A : \exists_{S \in P}(x \in S \wedge y \in S)\}$$

3. (a) Definieren Sie die Begriffe Permutation, Transposition, (un)gerade Permutation und Signum.

   (2 Punkte)

   (b) Sei $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.
   Berechnen Sie $\alpha\beta$, α^{-1}, $\operatorname{sign}(\alpha)$ und $\operatorname{sign}(\beta)$. *(2 Punkte)*

4. (a) Definieren Sie die Begriffe (ungerichteter) Graph und vollständiger Graph.
   Was versteht man unter einem planaren Graphen? Zeichnen Sie den vollständigen Graphen K_4 und den vollständigen bipartiten Graphen $K_{2,3}$ planar auf. *(3 Punkte)*

   (b) Formulieren Sie den Euler'schen Polyedersatz (ohne Beweis). *(1 Punkt)*

   (c) Beweisen Sie, dass der K_5 nicht planar ist. *(3 Punkte)*